O funkcyach równych co do wielkości i różnych co do natury.

Napisał

Władysław Kretkowski.

(Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. matem.-przyr. z d. 3 Października 1892 r.; ref. czł. Zajączkowski).

W pismach traktujących o rachunku różniczkowym, napotykamy zawsze twierdzenie: *że* funkcye równe sobie mają pochodne równe. Poniżej ośmielam się, jeżeli się nie mylę, zwrócić uwagę na to, że twierdzenie powyższe nie zawsze jest prawdziwem i że nawet istnieje nieskończenie wiele funkcyi równych sobie co do wielkości, a mających pochodne różne. Można więc wypowiedzieć twierdzenie: istnieją funkcye równe sobie co do wielkości a różne co do natury.

Przykład takiej funkcyi w postaci skończonej (a mówię dla tego „w postaci skończonej“ bo nieskończona utrudnia różniczkowanie w ogólności) to jest wyrażającej się przez liczbę skończoną działań, czyli nie nie będącą szeregiem nieskończonym, ułamkiem ciągłym nieskończonym i t. p. jest

$$1) \qquad u = \mathop{S}_{m=1}^{m=n} a_m \mathop{K}_{lm=o} \left\{ l_m \, f_m \, (l_m^{-1} z) \right\};$$

gdzie n jest liczbą całkowitą dodatną skończoną; a_m dla $m = 1, 2, \ldots, n$ są n ilościami stałemi dowolnemi; $\mathop{K}_{lm=o}$ jest znakiem wyrażającym, że należy wziąć kres (czyli granicę wyrażenia znajdującego się pod nim

$l_m f_m (l_m^{-1} z)$ dla l_m zbliżającego się do zera; z jest ilością zmienną niezależną i nakoniec f_m dla $m=1, 2, \ldots, n$ są znakami n funkcyi ulegających tylko zastrzeżeniu, żeby kresy n wyrażeń $l_m f_m (l_m^{-1} z)$ dla $m=1, 2, \ldots, n$ dla l_m gdzie $(m=1, 2, \ldots, n)$ były zerami, funkcyj zresztą zupełnie dowolnych.

Ponieważ funkcya u posiada postać skończoną, wyznaczenie jej pochodnej względem ilości zmiennej niezależnej z, nie przedstawia żadnych trudności i odbywa się w sposób znany. Biorąc więc pochodne, nim przejdziemy do kresów, a następnie przechodząc do kresów otrzymamy:

$$D_z u = D_z [\mathop{S}_{m=1}^{m=n} a_m \mathop{K}_{lm=o} \{ l_m f_m (l_m^{-1} z\} = \mathop{S}_{m=1}^{m=n} a_m \mathop{K}_{lm=o} \{ l_m \mathop{D}_{lmz} f_m (l_m^{-1} z) D (l_m^{-1} z) \} =$$

$$= \mathop{S}_{m=1}^{m=n} a_m \mathop{K}_{lm=o} \mathop{D}_{lmz}{}_{-1} f_m (l^{-1} z),$$

co można napisać krócej:

$$D_z u = \mathop{S}_{m=1}^{m=n} a_m \mathop{K}_{lm=o} \mathop{/_{-1}}_{y=lmz} D_y f_m (y)$$

gdzie $\mathop{/_{-1}}_{y=lmz}$ jest znakiem dogodnym podstawienia, wyrażającym że w pochodnej $D_y f_m (y)$ należy zamiast y podstawić $l_m^{-1} z$. Znak ten używany już był przez niektórych autorów, naprzykład przez p. Moigno w jego rachunku przemienności, mianowicie w dziele: Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral,... Tome quatriéme. Premier fascicule. Calcul des variations, rédigé en collaboration avec M. Lindelöf. Paris, Mallet-Bachetier,... 1861. Osemka, stronic 20 i 352.

Jako przykład bardziej szczególny, a więc dowodzący dotykalniej, że tak powiem, twierdzenia wypowiedzianego wyżej, wezmę:

$$n=1,\ a_1=1,\ l_1=l,\ f_1=\sin.$$

a wtedy funkcya równa zeru, mająca pochodnę różną od zera, przybiera kształt:

$$u = \mathop{K}_{l=o} \{ l \sin (l^{-1} z) \};$$

a jej pochodną jest

$$D_z u = \mathop{K}_{l=o} \cos (l^{-1} z)$$

różna w ogólności od zera, bo nawet będąca ilością dowolną, zawartą pomiędzy -1 i $+1$ jeżeli tak z jak i l są ilościami rzeczywistemi a w przeciwnym razie zupełnie dowolną urojoną.

Z powyższego wynika oczywiście twierdzenie:

Istnieje nieskończenie wiele funkcyi równych sobie co do wielkości a różniących się od siebie co do natury, bo mających pochodne różne

i uwagi, że:

1. Prawie wszystkie twierdzenia rachunku różniczkowego nie są ogólnemi bezwzględnie mówiąc, lecz stosują się tylko do pewnego działu funkcyi;

i 2. (dodając funkcyę 1) do każdej funkcyi. Każdą daną funkcyą mającą pochodną oznaczoną można przerobić na funkcyę równą poprzedniej, a mającą pochodną nieoznaczoną.